Ασκήσεις Πραγματικής Ανάλυσης

Δευτέρα 7 Μαρτίου 2016

2° Φυλλάδιο - Πληρότητα, Ιδιότητες supremum και infimum

Άσκηση 1. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\sup A = \inf B$. Να δειχθεί ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ με $b - a < \varepsilon$.

Άσκηση 2. Έστω A, B μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $\sup A \leq \inf B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ ισχύει ότι $a \leq b$.

Άσκηση 3. Έστω A μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(α) Να δειχθεί ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A, με $a_n \to \sup A$.

(β) Αν $\sup A \notin A$, τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A, με $a_n \to \sup A$.

Άσκηση 4. Έστω A, B μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ και $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(α) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ και $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

(β) $\sup(-A) = -\inf A$ και $\inf(-A) = -\sup(A)$.

(γ) Αν $\lambda \geq 0$, τότε $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ και $\inf(\lambda A) = \lambda \inf A$.

(δ) Αν $\lambda < 0$, τότε $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$ και $\inf(\lambda A) = \lambda \sup A$.

(ε) Αν $B \subseteq A$, τότε $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$.

Άσκηση 5. Έστω A, B μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι

(α) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ και

(β) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Να δειχθεί ότι αν $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ και να δοθεί παράδειγμα όπου η ανισότητα είναι γνήσια.

Άσκηση 6. Αποδείξτε την ακόλουθη αρχή επαγωγής στο $[0, 1]$: Έστω $A \subseteq [0, 1]$ με τις εξής ιδιότητες

(i) $0 \in A$,

(ii) για κάθε $a \in A$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $[a, a + \varepsilon) \subseteq A$,

(iii) για κάθε $x \in [0, 1]$ με $[0, x) \subseteq A$, έπεται ότι $x \in A$.

Τότε $A = [0, 1]$.
(Υπόδειξη: Θεωρείστε το σύνολο $S = \{t \in [0, 1] : t \notin A\}$.)

Άσκηση 7. Να δειχθεί ότι για το σύνολο $A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} \subseteq \mathbb{R}$, ισχύει ότι $\sup A = \sqrt{2} \notin A$.